**Numeriska inlämningsuppgiften**

**SI1140 del 2/SI1141 Fysikens Matematiska Metode**

Vi vill lösa följande vågekvationen.

1. Vi vill ställa en rumsdiskret modell approximerar det kontinuerliga problemet på följande formen.

Vi vill rum-diskreditera så att vi kan använda numeriska metoder till att lösa

PDE. Då ska vi dela hela strängen från till till lika långa delar där varje del

har längden . Vi kallar den punkten som och den punkten

som . För att dela ett segment till delar behöver vi punkter och de

punkterna är då vår rum-diskreditera till . Den PDE ska gälla för de

punkterna. Vi har en andragrads rumsderivata i PDE så kan vi skriva derivatan som:

För kan vi se att det ska motsvara som kan diskretiseras till följande vektor:

Begynnelsevillkoret kan diskretiseras på samma sätt:

Sammanfattningsvis har vi följande:

Då kan vi ha .

1. I den här uppgiften beräknar vi egenvektor av då och . Då har vi att:

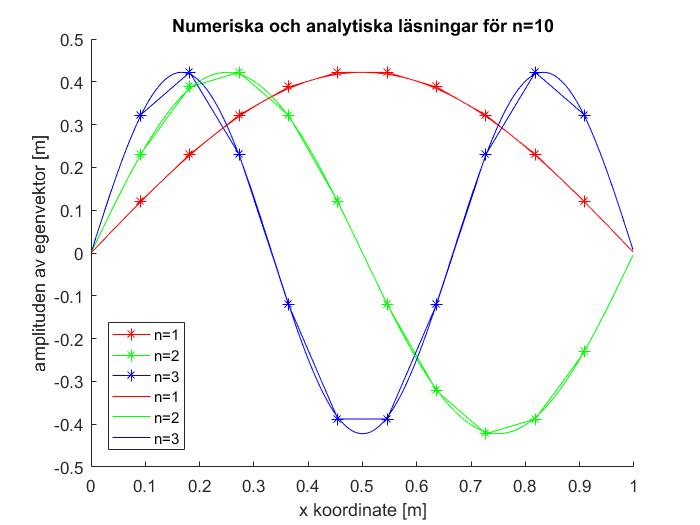
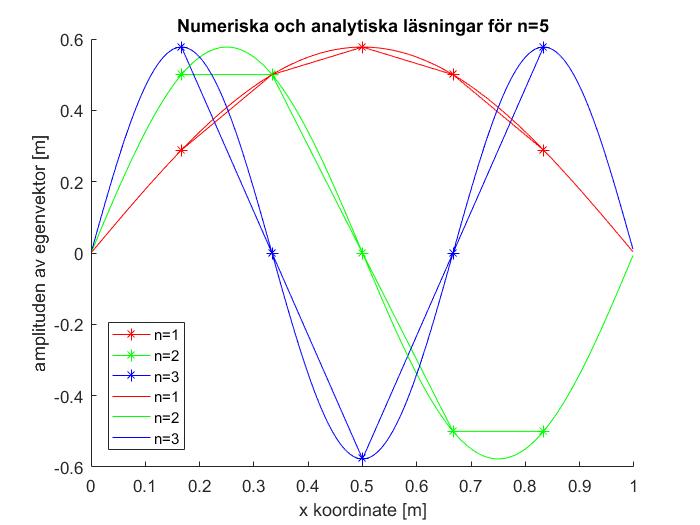
Genom att beräkna egenvektor av kan vi lösa uppgiften vilken har

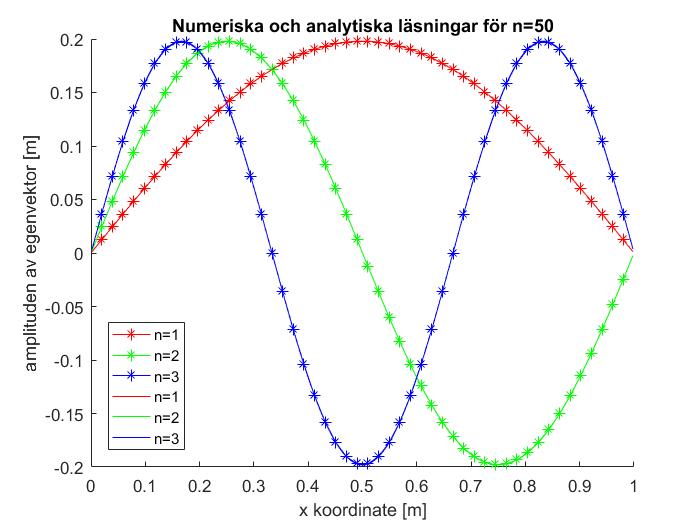
en sinus formig analytisk lösning. Tabellen nedan vissa de tre lägsta egenvärdens absolut belopp till för olika N:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 𝑵 | 𝑬𝒈𝒆𝒏𝒗ä𝒓𝒅𝒆 𝟏 | 𝑬𝒈𝒆𝒏𝒗ä𝒓𝒅𝒆 2 | 𝑬𝒈𝒆𝒏𝒗ä𝒓𝒅𝒆 3 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| Analytisk |  |  |  |

Plottningar nedan visar de numeriska lösningarna och de analytiska lösningarna för

𝑁 = 5, 10, 50.





1. I den här uppgiften vill vi beräkna egenvektorer och egenvärde till när har följande form.

Numeriska lösningar kan lösas på samma sätt förutom vi multiplicera varje nod med

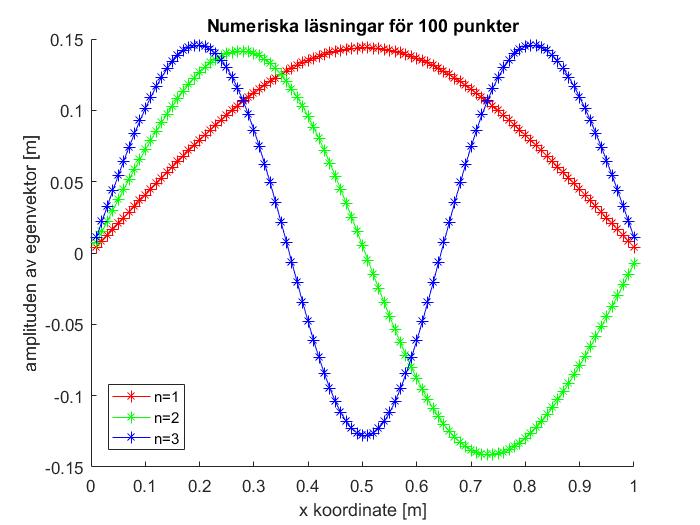
Motsvarande och beräkna egenvektor med den resulterande matris. I den här

uppgiften använder vi 100 punkter för att vår lösning kan vara relativt slät.

Den tre lägsta egenvärden blir då:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 𝑬𝒈𝒆𝒏𝒗ä𝒓𝒅𝒆 𝟏 | 𝑬𝒈𝒆𝒏𝒗ä𝒓𝒅𝒆 2 | 𝑬𝒈𝒆𝒏𝒗ä𝒓𝒅𝒆 3 |
|  |  |  |

Plottningen ser ut som följande:



1. Vi vill lösa uppgiften under begynnelsevillkoret:

Detta ekvationen kan diskreteras till 𝑢 där . På grund av att matrisen innehåller densiteten vilken gör att inte är symmetrisk. Då kan vi inte utveckla begynnelsevillkoret i egenvektorer. Men vi kan låta vara en Sturm-Liouville operator vilken har . Då vet vi att kan utvecklas i ortogonala egenvektorer. På grund av att har vi vilken är symmetrisk. Så egenvektorer till föregående uppgiften passa bra till den här uppgiften med inre produkten

Detta inreprodukten kan diskreteras till följande summa:

Då kan vi skriva begynnelsevillkoret till en summa som följande:

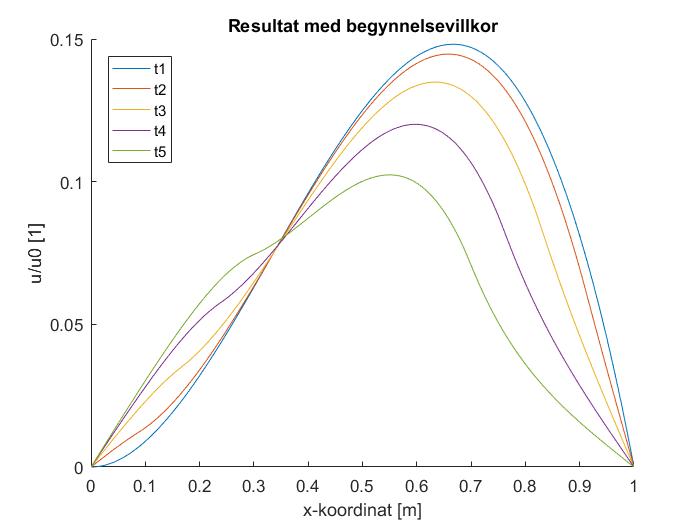
För att vi anta att så har vi följande PDE: vilken kan lösas med variabelseparationen. Så den tids delen blir generellt: för alla egenvärden 𝜆 𝑖 . För att uppfylla begynnelsevillkoret antar vi

då:

Vilken ger den generella lösningen:

Här kan vi anta att och är egenvärde multiplicera med motsvarande .

Nu kan vi beräkna från tills . Resultatet av simulering ligger här nere.



1. Vi vill beräkna den stationärt lösning under villkoret . Då ska vi har den följande differentiella ekvation:

Detta uttrycket måste uppfylla randvillkoret . Enligt definition uppe har vi följande:

Där vi antar att gå från 0 till 1 och enhetlös för att ge rätt dimension.

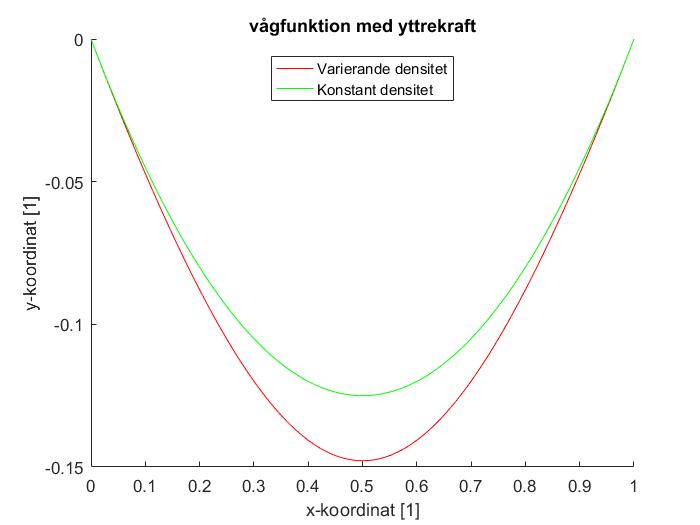
Då har vi uttrycket för :

Randvillkoret ger:

För konstant densitet är det enklare:

Med randvillkoret får vi:

Då kan vi plotta dem med Matlab och får följande resultat. De båda plottning innehåller ingen del.



Matlab kod:

%% b uppgiften

n = 500;

lim = 500;

A = zeros(n);

for i = 1:n

A(i,i) = -2;

if i>1

A(i-1,i) = 1;

end

if i<n

A(i+1, i) = 1;

end

end

[V,D] = eig(A);

d = sort(diag(D)\*(n\*n));

figure;

hold on

title('Numeriska och analytiska läsningar för n=50')

xlabel('x koordinate [m]')

ylabel('amplituden av egenvektor [m]')

step = 1/(n+1):1/(n+1):1-1/(n+1);

s = 1/lim;

plot(step,-V(:, end ), 'r\*-') % plot för numeriskt beräknad egenvektor u\_1

plot(step, V(:, end-1), 'g\*-') % plot för numeriskt beräknad egenvektor u\_2

plot(step, V(:, end-2), 'b\*-') % plot för numeriskt beräknad egenvektor u\_3

plot(s:s:1-s, sin(pi\*1\*(s:s:1-s))\* max(abs(V(:,end))), 'r-') % plot för analytic u\_1

plot(s:s:1-s, sin(pi\*2\*(s:s:1-s))\* max(abs(V(:,end))), 'g-') % plot för analytic u\_1

plot(s:s:1-s, sin(pi\*3\*(s:s:1-s))\* max(abs(V(:,end))), 'b-') % plot för analytic u\_1

legend('n=1','n=2','n=3','n=1','n=2','n=3','Location','Southwest')

%% c uppgiften

n = 100;

x = linspace(1/n,1-1/n,n);

phi=(4+1)/10;

rho = (1+9/20\*cos(2\*pi\*(x+phi)));

B = zeros(n);

for i = 1:n

B(i,i) = -2;

if i>1

B(i-1,i) = 1;

end

if i<n

B(i+1, i) = 1;

end

end

B = diag(1./rho)\*B;

[V,D] = eig(B);

dd = sort(diag(D)\*(n\*n));

figure;

hold on

title('Numeriska läsningar för 100 punkter')

xlabel('x koordinate [m]')

ylabel('amplituden av egenvektor [m]')

step =1/n:1/n:1;

[d, i] = sort(min(D));

V1 = V(:, i(end ));

V2 = V(:, i(end-1));

V3 = V(:, i(end-2));

plot(step, V1(:), 'r\*-') % plot för numeriskt beräknad egenvektor u\_1

plot(step, V2(:), 'g\*-') % plot för numeriskt beräknad egenvektor u\_2

plot(step, -V3(:), 'b\*-') % plot för numeriskt beräknad egenvektor u\_3

legend('n=1','n=2','n=3','Location','Southwest')

%% d uppgiften

n = 1000;

x = linspace(1/n,1-1/n,n);

phi=(4+1)/10;

rho = (1+9/20\*cos(2\*pi\*(x+phi)));

B = zeros(n);

for i = 1:n

B(i,i) = -2;

if i>1

B(i-1,i) = 1;

end

if i<n

B(i+1, i) = 1;

end

end

B = diag(1./rho)\*B;

[V, D] = eig(B);

[d, i] = sort(-min(D));

u0 = x.^2.\*(1-x);

Vi = zeros(size(V));

for k = 1:size(d)\*[0; 1]

Vi(:,k) = V(:,i(k));

end

tend = sqrt(1/d(1));

dt =tend/4;

sum = Vi\*diag(Vi\u0');

figure()

title('Resultat med begynnelsevillkor')

xlabel('x-koordinat [m]')

ylabel('u/u0 [1]')

hold on;

for t = 0:dt:tend

u = sum\*(cos(t\*sqrt(d.\*rho))');

plot(x,u)

hold on

end

legend('t1','t2','t3','t4','t5', 'Location', 'Northwest');

%% e)

x = 0:1/1000:1;

uv = (9\*cos(2\*pi\*x))/(80\*pi^2 )+x.^2/2-x./2-9/(80\*pi^2 );

uc = x.^2/2-x./2;

figure();

title('vågfunktion med yttrekraft')

xlabel('x-koordinat [1]')

ylabel('y-koordinat [1]')

hold on;

plot(x, uv, 'r');

plot(x, uc, 'g');

legend('Varierande densitet', 'Konstant densitet', 'Location','North');